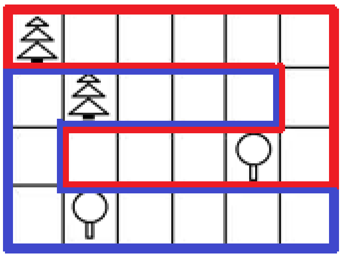
**5 класс**

1. Например так:



**Критерий:** Любое правильный пример – 7 баллов.

2. **Ответ: 12 девочек.** Можно заметить, что дети стоят в порядке ММДММДММД… Тогда на каждую девочку приходится по два мальчика, значит девочек всего в два раза меньше чем мальчиков. То есть девочек всего 12.
**Критерии:** только ответ без обоснования почему девочек вдвое меньше – 2 балла. Ответ + рисунок – 5 баллов.
3. Например, так:
$$1 \cdot (2+3)+4-5=4.$$
**Критерий:** Любое правильный пример – 7 баллов.
4. **Ответ: 27 и 72.** Достаточно заметить, что 126=2·7·9=2·7·(2+7). Значит таких чисел может быть два: 27 и 72.
**Критерии:** подобран один из ответов – 1 балл, подобраны оба ответа – 2 балла. Обоснованно найден один из ответов, но другой потерян – 5 баллов.
5. **Ответ: нельзя.** Заметим, что при таких операциях не меняется четность количества камней во всех кучах. Значит в кучах, где изначально был 2021 камень всегда будет нечетное количество камней, а в куче, где изначально было 2 камня всегда будет четное количество камней. А значит и равенства никогда не будет.
**Критерии:** только ответ – 0 баллов.

**6 класс**

1. **Ответ: 18 см.** Пусть длина горизонтального разреза равна 3х, а длина вертикального разреза 2у. Тогда длина всех разрезов будет 3х+2·2у=3х+4у=32 см, а периметр будет 2·3х+2·2у=6х+4у=44 см. Откуда 3х=12 см, или х=4 см. Отсюда находится у=5 см. То есть периметр маленького прямоугольника равен 2х+2у=18 см.

   **Критерии:** Верно найден ответ к задаче с применением подбора значений стороны, с последующей проверкой – 3 балла, просто подобранный ответ – 1 балл.
2. **Ответ: карточка с числом 3.** Так как суммы всех чисел во всех столбцах равны между собой, то сумма всех чисел в прямоугольнике делится на число столбцов, т. е. на 5. Аналогично, сумма всех чисел в прямоугольнике делится на 4. Таким образом, сумма всех чисел в прямоугольнике делится на 20. А сумма всех чисел на карточках равна 63. Поэтому у Кости осталась карточка с числом 3.

   **Пример:**

   | | | | | |
   |---|---|---|---|---|
   | 2 | 1 | 3 | 1 | 4 |
   | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 |
   | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |
   | 3 | 4 | 1 | 2 | 1 |

   Критерии: обоснованный ответ без примера – 5 баллов. Только пример с верным ответом – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.
3. **Ответ**:

$$1 : (((2 + 3) : 4) : 5) = 4.$$

4. **Ответ: 47 и 74.** Достаточно заметить, что 308=4·7·11=4·7·(4+7). Значит таких чисел может быть два: 47 и 74.

   **Критерии:** подобран один из ответов – 1 балл, подобраны оба ответа – 2 балла. Обоснованно найден один из ответов, но другой потерян – 5 баллов.

5. **Ответ: нельзя.** Заметим, что ход не изменяет четность количества камней во всех кучах. То есть в кучах с изначальным количеством камней равным 2021 всегда будет нечетное количество камней, а в куче с 2 камнями всегда будет четное количество. Значит равенства количества камней в этих кучах достигнуть не удастся.

   **Критерии:** только ответ – 0 баллов.

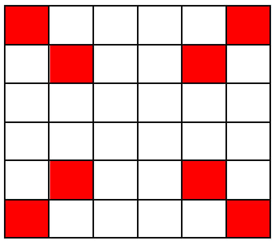
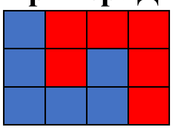
**7 класс**

1. **Ответ: 18 см.** Пусть длина горизонтального разреза равна 3x, а длина вертикального разреза 2y. Тогда длина всех разрезов будет 3x+2·2y=3x+4y=32 см, а периметр будет 2·3x+2·2y=6x+4y=44 см. Откуда 3x=12 см, или x=4 см. Отсюда находится y=5 см. То есть периметр маленького прямоугольника равен 2x+2y=18 см.
   **Критерии:** Верно найден ответ к задаче с применением подбора значений стороны, с последующей проверкой – 3 балла, просто подобранный ответ – 1 балл.
2. **Ответ: 4, 4, 3, 2, 1, 1 очков.** Каждая команда сыграла по 5 матчей против остальных команд. Команды, занявшие два первых места, участвовали всего 9 матчах (включая матч между собой), а значит набрали в сумме не больше 9 очков на двоих. Учитывая условие про отсутствие ничьих, и то, что команды набрали одинаковое количество очков, получаем, что каждая из них набрала не более 4 очков. Тогда команда, занявшая 3 место, набрала не более 3 очков, а команда, занявшая 4 место – не более 2 очков. Кроме того, команды, занявшие два последних места, сыграли между собой, а значит разыграли 1 очко. То есть набрали хотя бы 1 очко каждая. Тогда команда, занявшая 4 место, набрала не менее 2 очков, а команда, занявшая 3 место – не менее 3 очков. Получается, единственно возможное распределение очков такое: Первые две команды – 4 очка, третье место – 3 очка, четвертое место – 2 очка, два последних места – 1 очко.
   Пример:

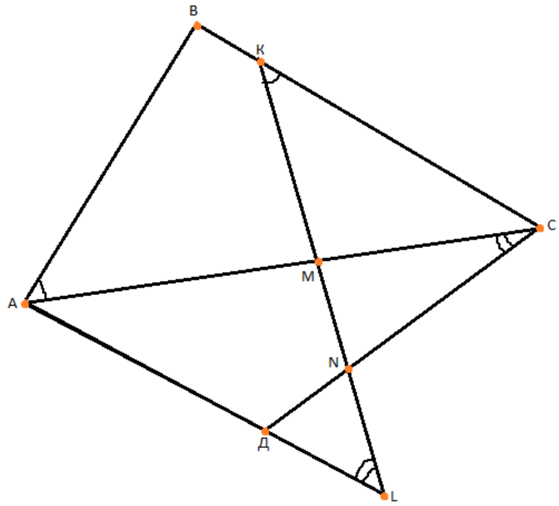
| | Первая | Вторая | Третья | Четвертая | Пятая | Шестая | Итого |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Первая | | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| Вторая | 0 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| Третья | 1 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 3 |
| Четвертая | 0 | 0 | 1 | | 1 | 0 | 2 |
| Пятая | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 1 |
| Шестая | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 1 |

   1-победа, 0-поражение.
   Критерии: Обоснованный ответ, без примера такого турнира – 5 баллов. Только пример такого турнира – 2 балла.
3. **Ответ: веселых мартышек больше.** Как видно из условия, всего было сделано 99 «результативных» бросков (когда в кого-нибудь попали). Для образования грустной мартышки требуется два броска. Поэтому, по принципу Дирихле, больше 49 грустных мартышек появиться не могло. Значит, веселых мартышек в конце игры хотя бы 51, поэтому их все-таки больше.
4. **Ответ: 51.** Пусть искомое двухзначное число будет $\overline{ab}$. Тогда $x = \overline{9ab}$, а $y = \overline{ab9}$. Получим $\overline{9ab} - \overline{ab9} = 432$. Или
   $$\left(900 + \overline{ab}\right) - \left(\overline{ab0} + 9\right) = \left(900 + \overline{ab}\right) - \left(10 \cdot \overline{ab} + 9\right) = 891 - 9 \cdot \overline{ab} = 432.$$
   Откуда получаем $9 \cdot \overline{ab} = 459$, следовательно $\overline{ab} = 51$.
   **Критерии:** подобранный ответ без обоснования – 1 балл.
5. **Ответ: нельзя.** Заметим, что каждый ход изменяет четность количества камней во всех кучах. То есть если рассматривать кучу в 2021 камень и кучу в 2022 камня, изначально в них количество камней разной четности. А каждый последующий ход этого менять не будет. Значит равенства количества камней в этих кучах достигнуть не удастся.

**8 класс**

1. **Ответ:** скорость течения реки равна 6 км/ч. Заметим, что оба катера одновременно стартуют и пунктов А и В, и одновременно достигают места встречи (что логично=)). То есть отношение пройденных расстояний равна отношению скоростей катеров. Далее с места встречи катера отходят одновременно и доходят пунктов А и В также одновременно. То есть тут также отношение пройденных расстояний равна отношению скоростей катеров. Но так как пройденные расстояния до места встречи и от места встречи есть одно и то же, то выходит равенство отношений скоростей
$$\frac{15+x}{20-x}=\frac{S_1}{S_2}=\frac{15-x}{x},$$
Где $x$ – скорость течения реки, $S_1$ – расстояние, пройденное первым катером до места встречи, $S_2$ – расстояние, пройденное вторым катером до места встречи. Откуда получаем $(15+x)\cdot x=(15-x)(20-x)$, далее раскрывая скобки получается $15x+x^2=300-35x+x^2$. Откуда $50x=300$ или $x=6$.
Критерии: верно составленное уравнение движения для одного катера – 1 балл,
2. **Ответ:** $\mathbf{1305 = 729 + 576 = 9 + 1296.}$ Заметим, что один из этих двух делителей — нечетное число. Но если разложить по простым делителям $46656 = 3^6\cdot 2^6$ , то увидим, что у этого числа всего семь нечетных делителей — $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$. Перебирая эти делители, находим ответ.
**Критерии:** Замечено, что один из делителей нечетное число – 2 балла. Потеряна одна пара решения – не больше 5 баллов. Подобранный ответ без обоснования – 1 балл.
3. **Ответ: квадрат 12×12.** Фигура состоит из 6 клеток, а значит квадрат, составленный из таких фигурок будет состоять из количества клеток, делящихся на 6. Наименьший такой квадрат будет 6×6. Допустим его можно каким-то образом разбить на шесть данных фигурок. Рассмотрим в таком квадрате следующие отмеченные клетки. Заметим, что никакие две отмеченные клетки не могут лежать внутри одной фигуры. Значит, чтобы покрыть эти 8 отмеченных клеток понадобится хотя бы 8 фигурок. Противоречие.

**Пример:** Для квадрата 12×12 пример можно построить, например, таким образом

Из 12 таких прямоугольников легко собрать нужный квадрат.
**Критерии:** показано, что сторона квадрата кратна 6 – 2 балла. Пример для 12х12 – 3 балла. Обоснованно исключен вариант квадрата 6х6 – 2 балла.

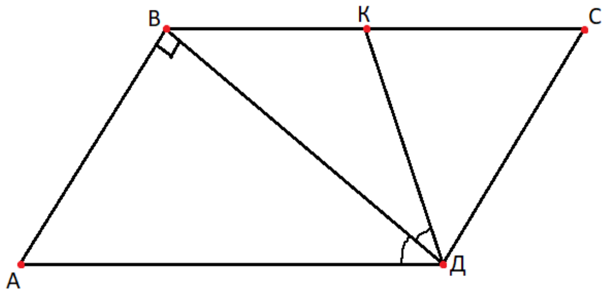
4. Обозначим M – как точку пересечения LK и AC, а N – как точку пересечения LK и CD. Далее заметим, что треугольники ABC и KMC подобны ( ∠ACB – общий, ∠LKC = ∠CAB), а также подобны треугольники ADC и AML (∠CAD – общий, ∠ACD = ∠MLA). Кроме того ∠AML=∠CMK (вертикальные). Тогда ∠ABC=∠CMK=∠AML=∠ADC. Чтд.
   Критерии:



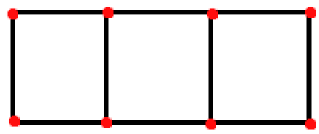

5. **Ответ: нельзя.** Заметим, что каждый ход изменяет четность количества камней во всех кучах. То есть если рассматривать кучу в 2021 камень и кучу в 2022 камня, изначально в них количество камней разной четности. А каждый последующий ход этого менять не будет. Значит равенства количества камней в этих кучах достигнуть не удастся.
   **Критерии:** только ответ без обоснования – 0 баллов.

**9 класс**

1. **Ответ:** $\boldsymbol{a = 2, b = -4, c = -2}$**.** Так как $b = c - a$, то $a \cdot c = c - a$ или $a \cdot c - c + a = 0$. Отнимем 1 с обеих частей равенства и получим $a \cdot c - c + a - 1 = (a-1)\cdot(c+1) = -1 = 1\cdot(-1) = (-1)\cdot 1$. Так как $a$ и $c$ – числа целые, то и скобки $(a-1)$ и $(c+1)$ тоже целые и равны 1 или -1. Так как $a$ и $c$ различные числа, возможен только случай $(a-1) = 1$ и $(c+1) = -1$. Откуда $a = 2, b = -4, c = -2$.
**Критерии:** ответ без обоснования – 1 балл.
Ответ с обоснованным подбором – 2 балла.
2. **Ответ: ВК:КС=1:1.** Т.к. АВСД параллелограмм, то ∠ABD=∠CDB=90 (накрест лежащие углы). Пусть ∠ADB=α. Тогда ∠BAD=∠BCD=90 – α. Кроме того ∠ADB=∠DBK=α=∠KDB (накрест лежащие углы). Тогда получается, что треугольник ВКД – равнобедренный. Тогда ВК=КД. Далее ∠CDK=∠CDB - ∠KDB= 90 – α= ∠BAD. Тогда треугольник СДК – равнобедренный. Тогда СК=КД. Получаем, что СК=КД=ВК. Тогда ВК:КС=1:1.




3. **Ответ: 450 км.** В первом случае поезд из пункта А имеет преимущество над поездом из пункта В в 4 часа, а во втором случае наоборот поезд из пункта В имеет те же 4 часа преимущества над поездом из пункта А. Т.к все поезда имеет одинаковую скорость, то из этого можно сделать вывод, что поезд В в первом случае проехал столько же, сколько поезд А во втором случае. Значит Расстояние между пунктами А и В равно 300+600=900. Тогда два поезда с одинаковой скоростью выезжающие одновременно встретятся на полпути, значит на расстоянии 450 км от пункта А.
4. Докажем неравенство равносильную данной
$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}<0.$$
Действительно,
$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}=\frac{1+a+1-a}{(1-a)(1+a)}=\frac{2}{1-a^2}\ ,$$
$$\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}=\frac{4}{1-a^4}\ ,$$
$$\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}=\frac{8}{1-a^8}\ ,$$
$$\frac{8}{1-a^8}+\frac{8}{1+a^8}=\frac{16}{1-a^{16}}$$
То есть $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}=\frac{16}{1-a^{16}}<0$. Последнее неравенство очевидно для всех $a>1$. Чтд.
5. **Ответ: n=127.** Оценка: Подсчет удобнее проводить по узлам клеток. Например, в прямоугольнике 1 × 3 таких узлов восемь (на рисунке отмечены красными точками). А на доске n × n таких узлов (n+1) × (n+1).



Т.к. плитки не имеют общих точек, то узлы у каждой плитки будут только свои. Тогда чтобы разместить 2021 плитки на доске понадобится хотя бы 2021·8=16168 узлов. Решая неравенство 16168 ≤ (n+1) × (n+1), получим, что n+1 ≥ 128 или n ≥ 127.

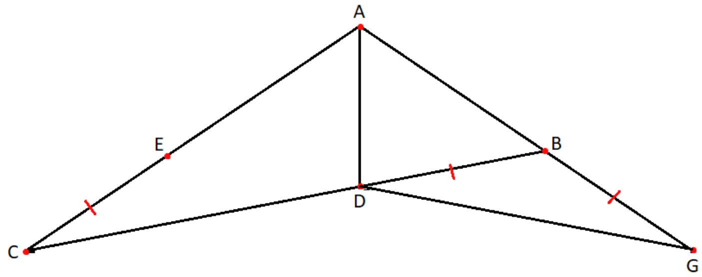
Пример: Покажем, что на доске 127×127 можно уместить 2021 прямоугольник.

Таким образом на доску 127×127 можно поставить $\frac{(127+1)}{2} \times \frac{(127+1)}{4} = 64 \cdot 32 = 2048$ плиток, а значит и 2021 поместится.

**Критерии:** оценка – 4 балла, пример – 3 балла.

**10 класс**

1. **Ответ: $\pm\sqrt{3}$.** Заметим, что $a^2+2ab+b^2=6ab$ и $a^2-2ab+b^2=2ab$. Тогда $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=\frac{6ab}{2ab}=3$. Тогда $\frac{a+b}{a-b}=\pm\sqrt{3}$.
   **Критерии:** потерян отрицательный корень – не больше 5 баллов.

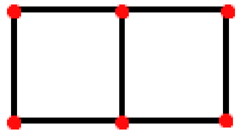



2. Продолжим сторону AB треугольника за точку B и отметим на этом продолжении точку G такую, что BG=BD=CE. Тогда треугольник DBG – равнобедренный (по построению). Т.к. ∠ABC=40, то ∠BGD=∠BDG=20. Заметим, что ∠ACB=20. Тогда треугольники ACD и AGD равны (AD – общая, ∠CAD=∠GAD=60 (AD – биссектриса), ∠AGD=∠ACD=20, а значит равны и третьи углы ∠ADC=∠ADG). Тогда AC=AG, а учитывая BG=CE, получим AE=AB, то есть треугольник BAE – равнобедренный. AD – биссектриса, а значит и высота, получается AD ⊥ BE.

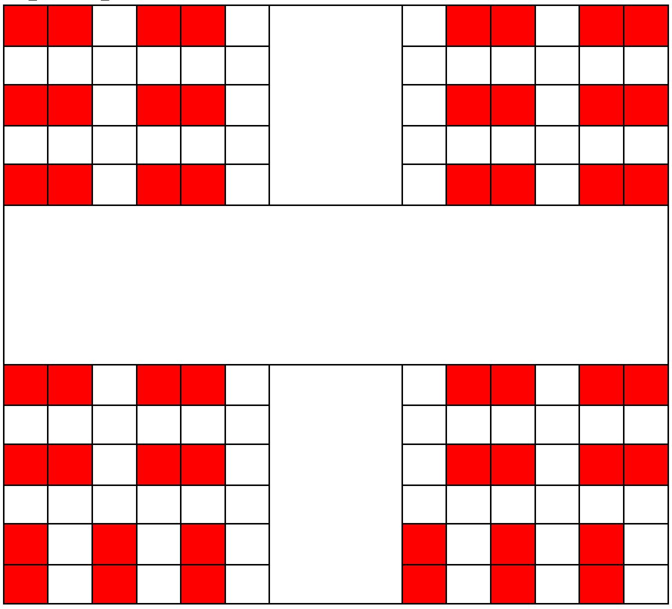
3. У параболы $y = f(x)$ имеется вертикальная ось симметрии $x = c$, где $c$ равно среднему арифметическому корней любого квадратного уравнения $f(x) = const$. Судя по расположению корней, $c \in [2, 3]$ (наименьшее возможное значение c достигается для корней 0 и 4, наибольшее — для 1 и 5). Если бы выполнялось неравенство $f(8) < 5$, то один из корней уравнения $f(x) = 5$ лежал бы в отрезке $[-2, -1]$ (это соответствует пересечению параболы с отрезком EF), а другой оказался бы больше 8. Тогда среднее арифметическое корней оказалось бы больше 3. Противоречие.

4. Возведем равенство в квадрат $xy = 1 - x - y$. Тогда получим
$$x^2y^2 = 1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy$$
   Подставим в левую часть вместо $x^2y^2$ полученное выражение. Получим, что теперь нужно доказать верность следующего неравенства
$$1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy + x + y \geq 5xy,$$
   или после преобразований получим
$$x^2 + y^2 - 3xy + 1 - x - y \geq 0.$$
   Далее, воспользуемся еще раз равенством $xy = 1 - x - y$ и получим неравенство
$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0,$$
   котрое справедливо при всех $x$ и $y$.

5. **Ответ: n = 110. Оценка:** Подсчет удобнее проводить по узлам клеток. Например, в доминошке 1 × 2 таких узлов шесть (на рисунке отмечены красными точками). А на доске n × n таких узлов (n+1) × (n+1). Т.к. плитки не имеют общих точек, то узлы у каждой плитки будут только свои. Тогда чтобы разместить 2021 плитки на доске понадобится хотя бы 2021·6=12126 узлов. Решая неравенство 12126 ≤ (n+1) × (n+1), получим, что n+1 ≥ 111 или n ≥ 110.



**Пример:** Покажем, что на доске 110×110 можно уместить 2021 доминошек.

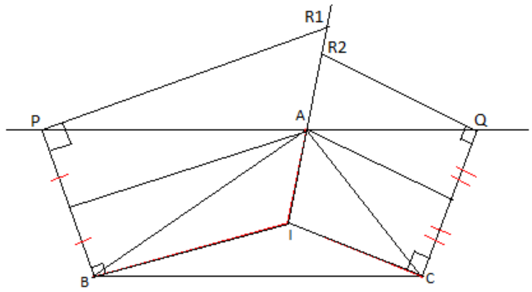


Таким образом на доске уместится $37 \times 54 + 55 = 2053$.

**Критерии:** оценка – 4 балла, пример – 3 балла.

**11 класс**

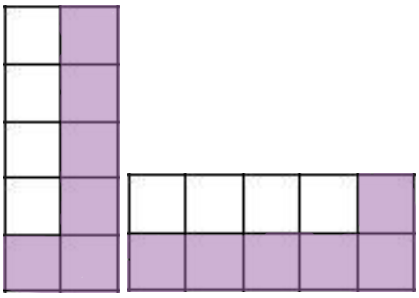
1. **Ответ: $\pm\sqrt{3}$.** Заметим, что $a^2 + 2ab + b^2 = 6ab$ и $a^2 - 2ab + b^2 = 2ab$. Тогда $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{6ab}{2ab} = 3$. Тогда $\frac{a+b}{a-b} = \pm\sqrt{3}$.
   **Критерии:** потерян отрицательный корень – не больше 5 баллов.
2. **Ответ: 4042.** Заметим, что $x^2 = ([x] + \{x\})^2 = [x]^2 + 2[x]\{x\} + \{x\}^2 = [x]^2 + 4042 + \{x\}^2$. Очевидно, что $0 < \{x\}^2 < 1$. То есть
   $$[x^2] = [[x]^2 + 4042 + \{x\}^2] = [x]^2 + 4042$$
   Откуда находим искомый ответ $[x^2] - [x]^2 = 4042$.
3. Например, такой является точка (1; 2022). Действительно, для все таких квадратичных уравнений при $x = 1$ получим $y = 1^2 + p + q = 1 + 2021 = 2022$. То есть все такие параболы проходят через точку (1; 2022) (на самом деле, такая точка единственна).
4. Заметим, что биссектрисы и соответствующие внешние биссектрисы треугольника будут перпендикулярны. То есть PB⊥BI и QC⊥CI. Продолжим биссектрису AI за вершину A и докажем, что точка R находится на этой прямой. Пусть перпендикуляр к PB в точке P и AI пересекаются в точке $R_1$, а перпендикуляр к QC в точке Q и прямая AI – в точке $R_2$.




   Т.к. PQ ∥ BC, то ∠ABC=∠PAB=2α, ∠ACB=∠QAC=2β. Тогда ∠PBA = 90 – ∠ABI = 90 – α = ∠APB. То есть треугольник APB – равнобедренный. Аналогично треугольник AQC – равнобедренный. Далее рассмотрим прямоугольную трапецию $IBPR_1$. В нем серединный перпендикуляр стороны PB проходит через точку A (треугольник APB – равнобедренный). Тогда по теореме Фалеса $AI=AR_1$. Аналогично для прямоугольной трапеции $ICQR_2$ получим $AI=AR_2$. Отсюда $AR_1= AI=AR_2$ на одной и той же прямой AI. Получается точки $R_1$ и $R_2$ совпадают. Но тогда получается эта совпадающая точка и есть точка пересечения перпендикуляров PR и QR. A для нее мы ранее доказали, что AI=AR. Чтд.

5. Допустим, Вадим как-то расставил прямоугольники. Докрасим каждый прямоугольник, как на рисунке. Заметим, что получившиеся прямоугольники 2x5 тоже не пересекаются, но могут касаться друг друга. Прямоугольник 2x5 выходит из квадрата, если прямоугольник 1x4 касается правой или нижней стороны квадрата, но не больше чем на одну клетку.

   **Оценка:** Получается в квадрате $n \times n$ помещается не больше чем $\frac{(n+1)\times(n+1)}{10}$ прямоугольников 1x4. Тогда n такой, что $\frac{(n+1)\times(n+1)}{10} \geq 2021$. Получим, $n$ не меньше 143.



**Пример.** Расставим в квадрат 143x143 прямоугольники 2x5. Поделим квадрат на три части 138x135, 8x135, 5x134 и останется маленький кусок. В 138x135 помещается 69*27, 8x135 помещается 27*4, 5x134 помещается 1*67. Что равняется 2038.

**Критерии:** оценка – 4 балла, пример – 3 балла.